

## メカトロニクス教育教材としての倒立振子

木村 和喜<sup>† a)</sup>

## Inverted Pendulum as a Mechatronics Educational Tool

Kazuyoshi KIMURA<sup>† a)</sup>

**あらまし** 倒立振子は、身近で不安定な多変数系として制御理論の有効な適用対象であると報告されているが、メカトロニクスの教材としては扱われていない。本報告では、初学者が実物を用いてメカトロニクスを学ぶための良き教材として倒立振子を取り上げる。機械設計の観点からは、移動体を対象とする上で必須であるモータの仕様の決定方法を取り上げる。制御工学の観点からは、実社会で最も広く適用されているPID制御では設計が困難な対象である多変数でかつ不安定な系として倒立振子を取り上げ、これに対し極配置法に基づくPID制御の設計方法を示す。実物を用いた学修を通して、理論と実際の相違を認識しながら物事の基本となるものが何かを知り、それを実際の場面で展開できる能力を培う教育を実践している。

**キーワード** メカトロニクス, 制御工学, 機械設計, 車輪型倒立振子, モータ仕様, PID制御, 極配置法

**Abstract** The inverted pendulum has been reported as an effective application of control theory as a familiar and unstable multivariable system, but it has not been discussed as a teaching material in mechatronics. This report focuses on the inverted pendulum as a valuable teaching tool for beginning students to learn mechatronics using real objects. From the perspective of mechanical design, it addresses the essential method for defining motor specifications, which is crucial when dealing with mobile systems. From the perspective of control engineering, it presents the inverted pendulum as a multivariable and unstable system that is difficult to design using PID control, which is the most widely applied control method in the industrial plants, and demonstrates the PID design based on pole assignment method for the inverted pendulum. Through learning with real objects, we aim to implement education that enables students to recognize the differences between theory and practice, understand the fundamentals of various concepts, and develop the ability to apply in practical situations.

**Keywords** Mechatronics, Control Engineering, Mechanical Design, Wheel-Type Inverted Pendulum, Motor Specification, PID Control, Pole Assignment Method

## 1. まえがき

メカトロニクスは機械工学（制御工学含む）と電気・電子・情報工学が融合した技術分野である。本学情報工学科ロボット開発コースでは、メカトロニクス系の科目を学修するが、最近の傾向とし

て、自ら製作しなくとも多くの出来合いの装置があり、物づくりのへの関心が薄れている感がある。

将来企業に就職して新商品の開発や生産装置の新設・改良などを担当する機会が巡ってきた時、大学で学んだ能力を十分に発揮するためには、実物を用いて学んだ経験が非常に有効となる。そのためには、実物を用いた実践的な学修が必要であり、その目的に合致したメカトロニクスの教材が倒立振子である。倒立振子は、ほうきを立てて遊ぶなど身近なものであるが、なぜ立てることができのかを正しく説明できないという経験があ

<sup>†</sup> 大阪国際工科専門職大学工科学部情報工学科, 大阪市  
Department of Information Technology, Faculty of Technology,  
International Professional University of Technology in Osaka, 3-3-1  
Umeda, Kita-ku, Osaka 530-0001 Japan

a) E-mail: kimura.kazuyoshi@iput.ac.jp

る。しかし、その過程において、物を使ったことの経験を通して物事の本質を捉え、そこから見えてくる課題を解決したいという思いが生じる。その思いを明確にし、そこから得られた原理・原則に基づいて対応策を講じていくことが重要である。

本報告では、車輪型倒立振子を教材として取り上げる。それを動かすアクチュエータとなるモータの選定が必要であるが、これに関して機械設計の面からの報告はされていない。また、倒立振子を制御の対象とした報告はあるが、ほとんどが、現代制御理論を適用するものである[1-3]。ただし、実際の製造現場において広く適用されている制御は、制御工学の専門家でなくても試行錯誤的に適用が可能なPID制御（比例・積分・微分制御）である。

そこで、機械設計の対象として、機械を動かすアクチュエータの選定、それを機械に取り付けるフランジ等の設計と製作（3DCAD + 3D プリンタの活用）、およびねじりと曲げの組合せ外力が作用する駆動軸の強度設計などがある中で、2章で制御設計のために導出したモデル（パラメータ同定含む）を用いたモータの選定について述べる。制御工学の対象としては、モデリング、パラメータ同定、制御器（コントローラ）の設計およびセンサ・アクチュエータ・マイコン制御を含めた実装技術がある中で、2章でモデルパラメータの同定実験、3章で倒立振子のPID制御による設計方法、4章で実物を用いた制御結果を示す。

本報告では、機械設計および制御工学の初学者に対して、倒立振子を教材として活用することにより、物事の本質を捉え、それから原理・原則を見出すための教育の有効性について述べる。

## 2. 機械設計の教材機能

機械装置の設計は、顧客からの要求事項である作業能力（加工能力、搬送能力など）、作業効率（タクトタイムなど）および作業精度（位置、応答速度など）を満足する機械装置を、省エネルギー、低コストなどを考慮して考案、設計するものである。倒立振子の実験装置の設計においては、振子を倒

立させるために必要なトルクと回転速度を有するモータを選定する必要がある、ここでは、制御設計において導出されたモデルを活用したモータの選定について述べる。

### 2.1 モデリング

対象とする車輪型倒立振子の概略を図1に示すが、振子である本体（マイコン、バッテリーを搭載）がモータ駆動される2つの車輪の回転軸上に設置され、前後に移動しながらバランスを取り倒立するものである。

制御を適切に設計し効果を発揮させるためには、正確なモデリングが必要である。特に、倒立振子の制御に適用される現代制御理論においてはモデリングの正確さが制御効果に直結する。倒立振子のモデリングでは、ニュートンの運動方程式による並進運動だけでは無く、振子およびタイヤの回転運動を考慮する必要がある、モデリングを学修する上で非常に有効である。回転運動を考慮することで、馴染みのなかった慣性モーメントや走行抵抗（回転速度に比例する抵抗）について実物を通して体験できる。本学の制御工学基礎の講義（以下制御工学基礎と称す）では、簡単のために倒立振子ではなく、水平においた台車に対するモデリングを実施している。以下に車輪型倒立振子

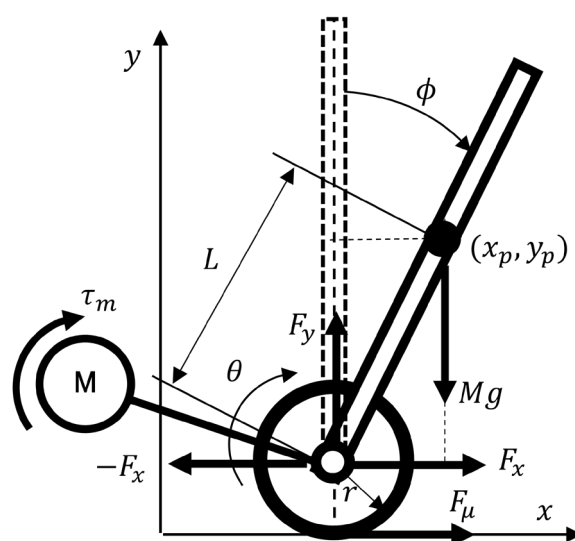


図1 車輪型倒立振子の概略図

Figure 1 Schematic diagram of wheel-type inverted pendulum.

のモデルの導出を示す．まず，振子系の運動方程式を導出する．

<振子の並進運動>

$$M \frac{d^2 x_p}{dt^2} = F_x, \quad x_p = r\theta + L \sin\phi \quad \cdots(1)$$

$$M \frac{d^2 y_p}{dt^2} = F_y - Mg = 0 \quad \cdots(2)$$

ここで， $(x_p, y_p)$  は振子の重心座標， $\phi$  は振子の回転角度， $\theta$  はタイヤの回転角度， $M$  は振子の質量， $r$  はタイヤの半径， $L$  はタイヤの回転中心から振子の重心までの距離， $F_x, F_y$  は振子に作用する  $x, y$  方向の力である．

<振子の重心周りの回転運動>

$$J_p \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \mu_\phi \frac{d\phi}{dt} = -F_x L \cos\phi + F_y L \sin\phi \quad \cdots(3)$$

ここで， $J_p$  は振子の慣性モーメント， $\mu_\phi$  は振子の回転抵抗（粘性抵抗）係数である．振子の振れは小さいものとして線形化し時間微分を  $[\cdot]$  で表すと，式(1)～(3)から次の微分方程式が得られる．

$$(J_p + ML^2)\ddot{\phi} + MrL\ddot{\theta} + \mu_\phi \dot{\phi} - MgL\phi = 0 \quad \cdots(4)$$

次に，モータ・タイヤ系の運動方程式を導出する．モータとタイヤの回転運動およびタイヤの並進運動に加え直流モータ電気回路の電圧降下に関する微分方程式により定式化される．

<モータ・タイヤの並進運動>

$$m \frac{d^2 x_c}{dt^2} = F_\mu - F_x, \quad x_c = r\theta \quad \cdots(5)$$

<モータ・タイヤの回転運動>

$$J_w \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \mu_\theta \frac{d\theta}{dt} = \tau_{mL} - \tau_L, \quad \tau_{mL} = N\tau_{Lm} \quad \cdots(6)$$

$$J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} = \tau_m - \tau_{Lm}, \quad \theta_m = N\theta \quad \cdots(7)$$

$$\tau_L = rF_\mu \quad \cdots(8)$$

ここで， $x_c$  はタイヤの水平方向位置， $m$  はモータ・タイヤの質量， $\theta_m$  はモータの回転角度， $\tau_m, \tau_L$  はモータおよび負荷のトルク， $F_\mu$  はタイヤと床面との摩擦力， $J_w, J_m$  はタイヤおよびモータの慣性モーメント， $\mu_\theta$  はタイヤの回転の粘性抵抗係数， $N$  は減速比， $\tau_{mL}, \tau_{Lm}$  はモータから負荷へ，負荷からモータへの伝達トルクである．式(5)～(8)から

$\theta_m$  を消去すると

$$MrL\ddot{\phi} + \{J_w + N^2 J_m + (M + m)r^2\}\ddot{\theta} + \mu_\theta \dot{\theta} = N\tau_m \quad \cdots(9)$$

<モータ電気回路の電圧降下>

モータ電気回路における電磁誘導，オームおよびキルヒホッフの法則から

$$L_m \frac{di}{dt} + R_a i + K_\theta \dot{\theta}_m = v_a \quad \cdots(10)$$

ここで， $v_a$  はモータの入力電圧， $i$  はモータコイルの電流， $L_m$  はコイルインダクタンス， $R_a$  は電機子抵抗， $K_\theta$  は電機子回転による逆起電力係数である．式(10)でインダクタンスは小さいもの ( $L_m = 0$ ) とすると，

$$i = (v_a - K_\theta \dot{\theta}_m)/R_a \quad \cdots(11)$$

モータトルクは電流に比例するから，

$$\tau_m = \eta K_t i \quad \cdots(12)$$

ここで  $K_t$  は電機子電流とモータトルクの係数， $\eta$  はモータ・減速ギア系の効率である．式(9)～(12)からモータ・タイヤ系の運動方程式が得られる．

$$(MrL)\ddot{\phi} + \{J_w + N^2 J_m + (M + m)r^2\}\ddot{\theta} + \left(\mu_\theta + \frac{\eta N^2 K_t K_\theta}{R_a}\right)\dot{\theta} = \frac{\eta N K_t}{R_a} v_a \quad \cdots(13)$$

ここで，振子系からモータ・タイヤ系への影響 ( $\ddot{\phi}$  の項) は小さいものとする，モータ入力電圧 (操作量) からタイヤの回転角度 (制御量) までの微分方程式は次の様にパラメータ  $a, b$  によってまとめられる．

$$\ddot{\theta} + a\dot{\theta} = bv_a \quad \cdots(14)$$

## 2.2 振子系のパラメータ同定

モデリングは，物理法則に基づいて微分方程式を導出するだけではなく，微分方程式の係数であるパラメータを決定することが重要である．倒立振子では，質量や寸法のように測定により簡単に決定できる場合がある一方で，慣性モーメントや粘性抵抗のように，実験により求めなければならない場合があり，モデリングの教材として非常に有効である．

パラメータ同定実験として，倒立振子である台車本体をタイヤの回転軸を中心に逆さに吊るし，初期角度に保持した状態から台車を振子として自

由振動させ、その自由振動から振動角度の減衰特性を測定する。吊り下げた振子の運動方程式は、式(3)において、本体の並進運動が無く、振子に作用する重力による回転モーメントの方向が逆になることから次式で表せる。

$$J_{pl} \frac{d^2\phi}{dt^2} + \mu_\phi \frac{d\phi}{dt} + MgL\phi = 0 \quad \cdots(15)$$

ここで、 $J_{pl}$  は、タイヤの回転軸回りの慣性モーメントであり、重心周りの慣性モーメント  $J_p$  とは  $J_p = J_{pl}/4$  の関係がある。これをラプラス変換した式(16)と、2次系の基本式(17)を係数比較する。

$$s^2 + \left(\frac{\mu_\phi}{J_{pl}}\right)s + \left(\frac{MgL}{J_{pl}}\right) = 0 \quad \cdots(16)$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad \cdots(17)$$

慣性モーメント  $J_{pl}$  および粘性摩擦係数  $\mu_\phi$  は、固有角周波数  $\omega_n$  および減衰係数  $\zeta$  により次の様に得られる。

$$J_{pl} = MgL/\omega_n^2, \quad \mu_\phi = (2\zeta\omega_n)J_{pl} \quad \cdots(18)$$

実験で得た減衰振動の測定値を図2(測定値)に示す。本波形は、2次系に対するインパルス応答波形となり、その振動周期  $T$  と振動波形の包絡線パラメータ  $\alpha$  とから固有角周波数  $\omega_n$  と減衰係数  $\zeta$  が求められる。

振動周期  $T$  との関係

$$2\pi/T = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \cdots(19)$$

包絡線パラメータ  $\alpha$  との関係

$$\alpha = \zeta\omega_n \quad \cdots(20)$$

こうして求めた固有角周波数と減衰係数を用いた2次遅れ系のインパルス応答のシミュレーショ

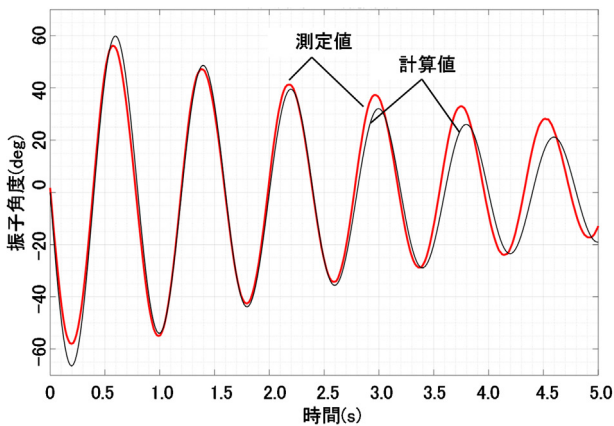


図2 振子の自由振動の実験結果

Figure 2 Experimental results of the free oscillation of the pendulum.

ン結果を図2(計算値)に示すが、良好な同定精度が得られた。

この実験を通して、慣性モーメントと走行抵抗が振動に対しどの様に影響するのかを体験できる。

## 2.3 モータ・タイヤ系のパラメータ同定

式(14)のパラメータ  $a, b$  は、台車を水平において状態でのモータ・タイヤ系に対する周波数応答実験により同定できる。式(14)の制御対象は積分特性を有する不安定系であるため、実験ではタイヤの回転数(エンコーダで測定)をモータ電圧にフィードバックし安定化した後に、正弦波状の電圧を入力した時の出力であるタイヤの回転角度を測定した。一例として、図3は振幅  $\pi/4$ 、振動数  $2\text{Hz}$  (角周波数  $4\pi[\text{rad/s}]$ ) の入力(細線)に対する出力(太線)を示すが、入力と出力の振幅比からゲインを、波形の遅れから位相を求める。制御工学基礎では、各種周波数に対しこの作業を繰返し、図4に示すボード線図を作成する(\*:測定値)。次に、2次遅れ系に対し減衰係数を変化させた時のボード線図をMATLABを用いて作図し、実験結果に最も近い減衰係数を同定値とした(実線:計算値)。ここで、固有角周波数は、図4のゲイン線図のピークを与える振動数に選んだ。この実験を通して、古典制御の中でも理解が難しい周波数応答ならびにボード線図の意味について実際の装置の応答を解析することで理解を深めることができる。上記同定実験で得られたパラ

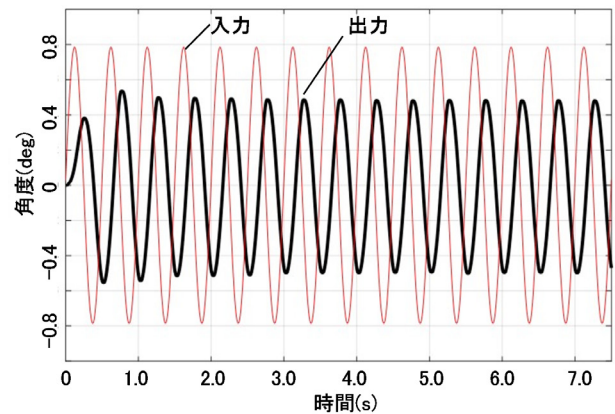


図3 周波数応答の実験結果

Figure 3 Experimental results of frequency response.



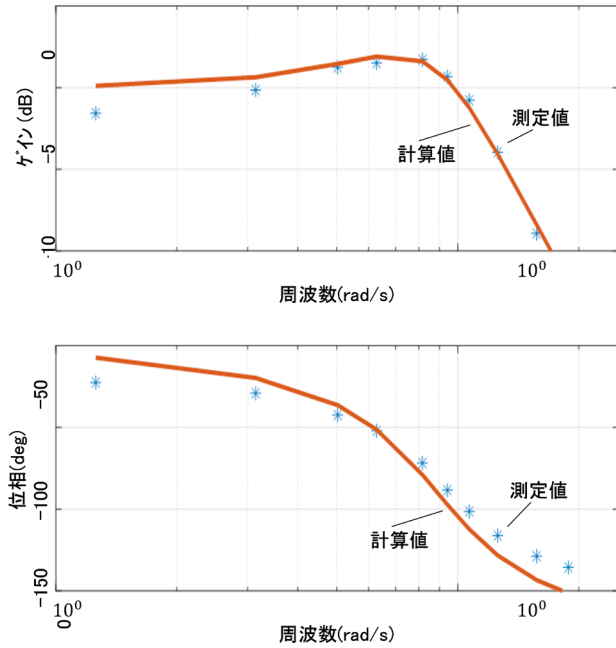


図4 周波数応答実験のボード線図

Figure 4 Bode diagram of frequency response.

メータを表1に示す。本パラメータを用いてモータトルクの計算や制御系の設計を行った。

## 2.4 モータトルクの決定

車輪型倒立振り子では、振り子である台車を垂直に立てた状態から解放した際に、振り子が倒れないようにタイヤを回転させるモータトルクが必要であり、式(9)から求まる初期動作の角加速度を用いて計算する。式(4)をラプラス変換するとモータトルクからタイヤの回転角度に対する伝達関数が得られ、先に求めた固有角周波数と減衰係数を用いて初期応答における振り子の角加速度が計算できる。

$$G(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1-\zeta^2)\omega_n^2} \quad \dots(21)$$

本2次遅れ系に対するインパルス応答は、伝達関数を逆ラプラス変換することで得られ、更にそれを時間微分することで角加速度が得られる。

$$\dot{\phi}(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t, \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad \dots(22)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \{(-\zeta\omega_n) \sin \omega_d t + \omega_d \cos \omega_d t\} \\ \ddot{\phi}(t) &= \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \\ &\quad \times \{(-\zeta\omega_n)^2 \sin \omega_d t + (-\zeta\omega_n)\omega_d \cos \omega_d t \cdot \\ &\quad + (-\zeta\omega_n)\omega_d \cos \omega_d t - \omega_d^2 \sin \omega_d t\} \quad \dots(23) \end{aligned}$$

倒立振り子を制御するモータには、振り子が倒れ始める初期動作を抑制するトルクが必要であり、式(9)から必要とする加減速トルクが次式で計算できる。

$$\{J_w + N^2 J_m + (M + m)r^2\} \ddot{\phi}(0) = N\tau_m \quad \dots(24)$$

ここで、式(23)を用いて時刻  $t=0$  の角加速度  $\ddot{\phi}(0)$  を計算するが、台車の同定実験ではほぼ水平状態（約90deg）からの自由振動であるが、倒立振り子の変動は $\pm 3\text{deg}$ 程度の微小量であることを考慮してパラメータ  $K$  の大きさを補正すると、必要なモータトルクは  $31.7\text{mNm}$  となった。今回実験に用いるモータは、定格トルク =  $2.75\text{mNm}$ 、減速比  $N=14$  であり ( $N\tau_m = 38.5\text{mNm}$ )、必要とする能力を有している。

## 3. 制御工学の教材機能

PID制御は、搬送クレーンにおける吊り荷（振り子を下げた状態）の振れ止め制御（外力が加えられても減衰し最終的には停止する安定な系）などに広く適用されている。制御工学基礎では、伝達関数とボード線図に基づき設計する位相遅れ・位相進み補償の一つとしてPID制御を学ぶ。PID制御は基本的には安定な系に対し試行錯誤的にゲインを決定し[4]、制御の専門家でなくとも減衰振動を確認しながらPID制御ゲインを決めることができる。しかし、倒立振り子は、放っておくと必ず倒れる不安定な系であり、かつ多変数系であることから、試行錯誤的にゲインを決定することは不可能であり、この点からPID制御は適用できないと考えられる。また、PID制御の設計は、一般的にボード線図を用いた周波数整形法により設計されるが[4,5]、ボード線図の意味することと対応する応答波形とが直接イメージできない初学

者にとっては難しい作業となる。

一方、制御対象の極（特性方程式の解）と応答波形の関係は理解し易く、多変数系においても同様である。複素平面において左半平面が安定であり、その中で虚数軸に最も近い極が応答を支配する。制御によりこれらの極を左半平面の実軸上に配置すればオーバーシュートの無い追従特性を示し、共役複素数に配置すれば振動特性を活用して応答速度を高めることができる。なお、閉ループ極は安定であれば何処でも良いのではなく、極を左半平面の遠く（絶対値大）に配置すると、操作量が大きくなり駆動装置の能力をオーバーしたり、大きなエネルギーを要したりすることから応答速度とエネルギーのバランスを考えた設定が必要である。以下に現代制御理論の極配置法に基づく方法によるPID制御（ここではPD制御）のゲイン設定方法を示す。

### 3.1 極配置法によるゲイン設定

極配置法は、現代制御理論による制御の設計法の一つであり [1]、制御工学基礎の学修範囲を超えた内容である。しかし、倒立振り子においては、当該学修範囲内で極配置法に基づいてフィードバックゲインを解析的に計算することが可能である。また制御系のブロック線図から Simulink モ

デル（図5）が作成でき、MATLAB の関数を使ったシミュレーションに比べ多変数系のシミュレーションが簡便に実施できる。ここで、 $k_f(1) \sim k_f(4)$  はフィードバックゲインである。

図からパラメータには以下の機能があることが分かる。モータ・タイヤ系のタイヤの角加速度  $\ddot{\theta}$  から振子系への伝達要素  $\alpha = a_{34}/a$ ,  $a_{34} = MrLa/J_0$  を通したタイヤの回転によるモーメント  $L(Mr\ddot{\theta})$  により振子を倒立させている。また、振子角度  $\phi$  をプラスフィードバックする要素  $a_{31} = MgL/J_0$  により系は不安定になる。更に、摩擦抵抗に関する要素  $a_{33} = -\mu_\phi/J_0$  により、振子の角速度  $\dot{\phi}$  がマイナスフィードバックされることで振動を抑制する。なお、振子系において、操作量に関する要素  $b_3 = -MrLb/J_0$ （後述）も含め全てのパラメータに慣性モーメント  $J_0 = J_p + ML^2$  が含まれており、振子の運動に影響していることが分かる。この様に、本モデルを用いると、状態方程式や伝達関数では理解が難しい制御対象のメカニズムが見えてくる。

倒立振り子のフィードバック制御は、振子の角度  $\phi$  と角速度  $\dot{\phi}$  およびタイヤの回転角度  $\theta$  と角速度  $\dot{\theta}$  の4つの状態量をモータ電圧  $v_a$  にフィードバックする多変数制御系であるが、測定できるのは振子角度  $\phi$  およびタイヤ角度  $\theta$  のみである。

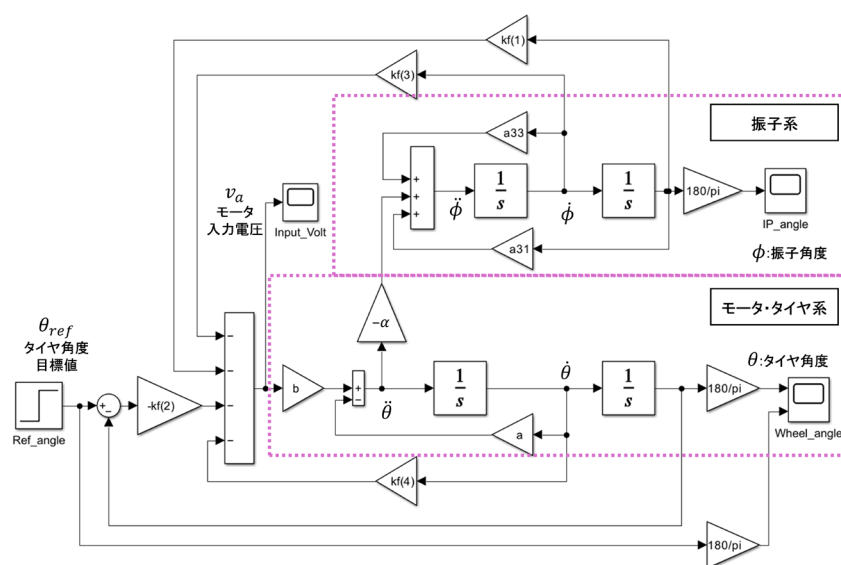


図5 車輪型倒立振り子制御システムの Simulink Model

Figure 5 Simulink model of control system for the wheel-type inverted pendulum.

表1 パラメータ一覧

Table 1 Parameter list.

パラメータ		数値
振り子	質量 $M[kg]$	0.805
	振り子重心距離 $L[m]$	0.05
	慣性モーメント $J_p [kgm^2]$	0.0016
	粘性係数 $\mu_\phi [Nms]$	0.0033
タイヤ モータ	質量(1セット) $m[kg]$	0.1
	半径 $r[m]$	0.0275
	慣性モーメント $J_w [kgm^2]$	—
	1次係数 $a[s]$	7.919
台車 動特性	定常ゲイン $b[(\frac{rad}{s^2})/V]$	39.666
	減速比 $N[-]$	14
その他	重力加速度 $g[m/s^2]$	9.81

これら 2 つの出力のみのフィードバックでは安定化は不可能であるが、それぞれの角速度を含む全状態量をフィードバックすることで安定化可能となる。実装において角速度は、測定器の分解能が高ければ数値微分可能であるが、そうでない場合には現代制御理論のオブザーバを適用する必要がある。

そこで、角度のフィードバックを比例制御  $[k_1, k_2]$ 、角速度のフィードバックを微分制御  $[k_3, k_4]$  とすると、2 系統の PD 制御と言えなくもない。なお、モータ・タイヤ系は、ステップ目標値に対して 1 型系であり、積分制御が無くても制御偏差なく目標値追従が可能である。通常 PID 制御のゲイン調整は、限界感度法 [5] のように制御ゲインを一つずつ順次調整していく方法をとるが、ここでは、極配置法に基づき PD 制御ゲインを一気に決定する方法を示す。通常の変数制御系であれば、これ以降の計算を手計算で実施することは困難であり、MATLAB 等の CAD を用いなければならない。しかし、倒立振り子の特性から、以下の様に手計算が可能である。

式 (4),(14) をラプラス変換すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} J_0 s^2 & MrLs^2 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_\phi s & 0 \\ 0 & as \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -MgL & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} v_a \quad (J_0 = J_p + ML^2) \quad \cdots(25)$$

この系において、閉ループ極を  $[-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, -\lambda_4]$  とする状態フィードバックを実施する。

$$\begin{aligned} v_a &= -\mathbf{k}\mathbf{x} + v = -(k_1\phi + k_2\theta + k_3\dot{\phi} + k_4\dot{\theta}) + v \\ &= -(k_1 + k_3s)\phi - (k_2 + k_4s)\theta + v \quad \cdots(26) \end{aligned}$$

この閉ループ伝達関数を計算し  $[\phi, \theta]^T$  を求める。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} J_0 s^2 + \mu_\phi s - MgL & MrLs^2 \\ 0 & s^2 + as \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} [k_1 + k_3s \quad k_2 + k_4s] \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} v \\ &\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} b_3 s^2 \\ [(s^2 - a_{33}s - a_{31})b] \end{bmatrix} v}{(s^2 + (a + bk_4)s + bk_2)(s^2 - a_{33}s - a_{31}) + b_3(k_1s^2 + k_3s^3)} \quad \cdots(27) \end{aligned}$$

閉ループ伝達関数式 (27) の特性方程式は次式である。

$$\begin{aligned} &s^4 + \{(a + bk_4) - a_{33} + b_3k_3\}s^3 \\ &+ \{-a_{31} + bk_2 - a_{33}(a + bk_4) + b_3k_1\}s^2 \\ &+ \{-a_{33}bk_2 - a_{31}(a + bk_4)\}s - (a_{31}bk_2) = 0 \quad \cdots(28) \end{aligned}$$

これに対して  $[-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, -\lambda_4]$  を解に持つ特性方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} &(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)(s + \lambda_3)(s + \lambda_4) \\ &= s^4 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)s^3 \\ &+ (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4)s^2 \\ &+ (\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4)s \\ &+ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 0 \quad \cdots(29) \end{aligned}$$

式 (28)(29) は同一であるから係数比較により状態フィードバックゲイン  $[k_1, k_2, k_3, k_4]$  が求まる。

$$\begin{aligned} k_2 &= -\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4/(a_{31}b) \\ k_4 &= -\{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4) + (a_{33}bk_2 + a_{31}a)\}/(a_{31}b) \\ k_1 &= \{(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4) + (a_{31} - bk_2 + a_{33}(a + bk_4))\}/b_3 \\ k_3 &= \{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + a_{33} - (a + bk_4)\}/b_3 \quad \cdots(30) \end{aligned}$$

CAD を使うのではなく、手計算ができれば、制御理論並びに計算アルゴリズムを理解する上で非常に有効である。また、手計算することでパラメータがどの様にフィードバックゲインの決定に影響するのかも理解でき、本方法を他の対象に適用する際や制御の内容を関係者に解り易く説明する際にも有効である。

### 3.2 MATLAB との計算結果の比較

MATLAB を用いて現代制御理論に基づきフィードバックゲインを求める。式 (4),(14) から車輪型倒立振り子の状態方程式を設定する。

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b \end{bmatrix} v_a \quad \cdots(31)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} \quad \cdots(32)$$

ここで、パラメータは 3.1 節と同一である。本開

ループ系の極は、次の通り右半平面内に不安定極と原点に極を持つ不安定系である。

$$\begin{bmatrix} -a, & 0, & \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{\mu_\phi}{J_0}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_\phi}{J_0}\right)^2 + 4\left(\frac{MgL}{J_0}\right)} \right\} \end{bmatrix}$$

$$= [-10.928, -7.919, 0, 10.006] \quad \cdots(33)$$

閉ループ極として、2つの安定極はほぼそのままとし、2つの不安定極を安定側に配置する状態フィードバックを実施する。

$$p = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4] = [-10, -9, -4, -3] \quad \cdots(34)$$

MATLAB の place 関数を用いて次のように実行すれば、状態フィードバックゲインが得られる。

```
>> k = place(A,B,p);
```

$$[k_1, k_2, k_3, k_4] = [-29.734, -0.249, -2.715, -0.40] \quad \cdots(35)$$

MATLAB の結果 (35) は、式 (30) の結果と同一である。ここで A,B は状態方程式 (31) の係数行列である。

#### 4. 制御実験

実験に用いた車輪型倒立振子を図 6 に示す。構成は、タイヤの回転角度をロータリエンコーダで検出し、台車の傾き角度をポテンショメータを活用した接触式センサで検出し、マイコンにより後部 2 輪のモータを制御するものである。マイコンボードは 32bitCPU (96MHz) を基本に、モータド

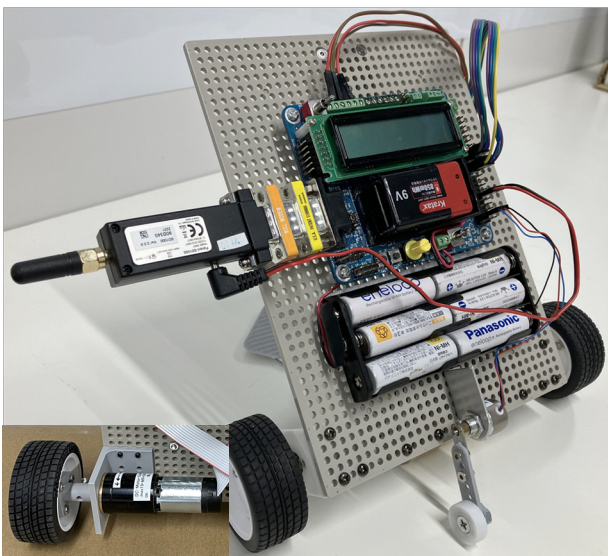


図 6 実験で使用した車輪型倒立振子

Figure 6 Wheel-type inverted pendulum using for the experiment.

ライバ (4ch), ロータリエンコーダ (2ch), 12bitA/D 変換およびシリアル通信ポート等を有するモータ制御用マイコン TK400RX [6,7] である。モータは定格トルク = 2.75mNm, 定格回転数 = 9310rpm, 定格電圧 = 6V, 減速比 = 14, エンコーダ分解能 = 128 パルス / 回転を有するモータ・ギア・エンコーダセットである。なお、実験データは、倒立振子が移動するため無線シリアル通信を用いてマイコンボードから PC (MATLAB 稼働) に送受信する。

車輪型倒立振子を倒立させた状態におけるステップ応答実験結果を図 7 に示す。実験は、タイヤの目標位置を 6 秒毎にタイヤ 1 回転分 (回転角度 360 度) ステップ状に変化させたが、目標通りに制御できている。なお、式 (27) の伝達関数から分かるように、モータ入力電圧からタイヤの回転角度への系は、不安定零点を有する系であり、ステップ入力に対する初期動作において逆応答が発生する。この現象は、Simulink モデルによるシミュレーション結果 (図 8) とよく一致している。

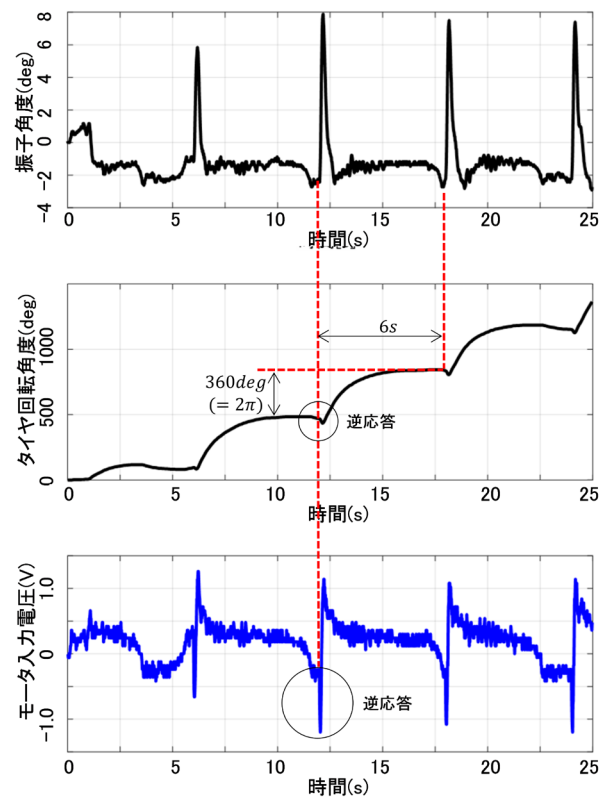


図 7 車輪型倒立振子のステップ応答実験結果

Figure 7 Experimental results of step response for wheel-type inverted pendulum.



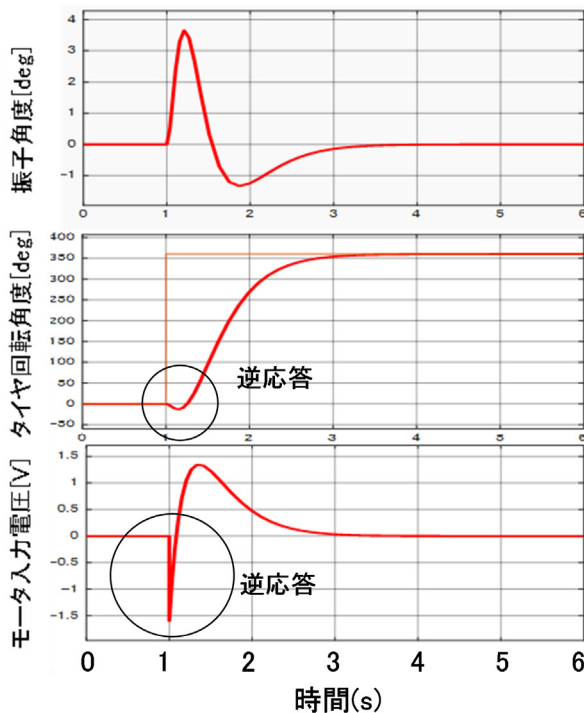


図8 ステップ応答のシミュレーション結果  
Figure 8 Simulation results of step response  
for wheel-type inverted pendulum.

目標値のステップ信号を入力すると、負のモータ電圧が発生しタイヤは反対方向に少し移動した後目標値の方向に移動する。この際、振り子は前傾するが制御により瞬時にまっすぐに倒立する。この実験結果から、正確にモデリングと制御設計ができていることが分かる。この様に、極による安定解析だけではなく、零点の応答への影響が体験できる事からも倒立振り子が有益な教材であると言える。

## 5. むすび

本報告では、倒立振り子がメカトロニクスの主要技術分野である制御工学および機械設計の点から非常に有益な教材であることを示した。実験室ベースでは、安定な対象を制御しても効果のほどが実感できない。一方、自製した不安定な対象を制御により安定化できた時は、理論の有効性を認識すると共に大きな達成感と喜びを味わうことができる。また、モデリングや実験による車輪型倒立振り子の動きの観察から、振り子の重心がタイヤの回転中心の直上に来るようにタイヤを動かせば倒

立するという安定化のメカニズムが理解できる。実物を用いた実験を通して実際に起こる現象を体験することで、理論と実際の違いを理解し、実物から得られる情報の重要性を経験できる。即戦力人材を社会に輩出することを目的とする本学においては、このような体験型教育が有益であるものとする。

本学には、ロボット開発コース以外にIoTシステムコースとAI戦略コースがあり、これらのコースの教材としても以下の様に有益であると考えられる。

IoTシステムコースであれば、振り子の傾斜角度センサとして今回用いた接触式センサの代わりにジャイロセンサや加速度センサなどの非接触センサを試みることで、各種センサの原理や特徴などを知ることでき、実用化の際の有意義な経験が得られる。更には、傾斜角度をカメラで撮影し画像処理により検出する方法などにも挑戦できる。

AI戦略コースであれば、制御理論により倒立させるのではなく、人がほうきを立てる場合の様に、学習により立たせることにトライしても良い。AIを用いて倒立振り子を立たせるシミュレーションを実施している報告はあるが、前述したようにシミュレーションと実物の制御の間には大きな違いがある。倒立振り子のようにモデリングがある程度正確にできる対象では、シミュレーションによる実証は非常に容易であるが、いざ実物で制御となると想定しない多くの課題により簡単には行かない場合が多い。

倒立振り子に限らず実物を用いた学修を通して、物事の基本となるものを知り、それを実際の場面で展開できる能力を培う教育を今後も実施していきたい。

**謝辞** 川谷亮治氏（元福井大学大学院機械工学専攻准教授）には、本報告の根幹となる車輪型倒立振り子に関して、製作並びにマイコンボードのプログラミングなど、多くの知識・知見をご教授頂き、この場をお借りして深く感謝申し上げます。

## 文 献

- [1] 川谷亮治, “フリーソフトで学ぶ線形制御”, 森北出版株式会社, 2008.
- [2] 川谷亮治, “「Maxima」と「Scilab」で学ぶ古典制御”, 工学社, 2014.
- [3] 川田昌克, 東俊一, 市原裕之, 浦久保孝光, 大塚敏之, 甲斐健也, 國松禎明, 澤田賢治, 永原正章, 南裕樹, “倒立振子で学ぶ制御工学”, 森北出版株式会社, 2017.
- [4] 伊東正美, “自動制御”, 丸善株式会社, 1981.
- [5] 杉江俊治, 藤田政之, “フィードバック制御入門”, コロナ社, 1999.
- [6] 川谷亮治, 高田直人, “実験で学ぶメカトロニクス TK400SH ボード実習”, 東京電機大学出版局, 2016.
- [7] 川谷亮治, 高田直人, “マイコンボード TK400 を活用したメカトロ教育の事例紹介”, 第 57 回自動制御連合講演会, 1A07-6, pp.556-559, 2014.



## 木村 和喜

1984 大阪大学工学部産業機械工学科卒.  
1986 同大学院修士課程修了. 2002 同大学にて博士(工学)取得. 1986 住友金属工業(現日本製鉄)に入社. 鉄鋼圧延プロセスの制御及び自動化技術の研究開発ならびに電気制御設備の企画・設計に従事. 現職にて, 機械システムの制御, 自動化の研究に従事.



この記事は Creative Commons 4.0 に基づきライセンスされます  
(<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ja>).